서강대학교 SOGANG UNIVERSITY

논 술 시 험 문제지

<자연과학부/전자공학계>

■ 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고 본문부터 시작할 것.
2. 답안 분량은 띄어쓰기 포함한 글자 수임.
3. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용하여야 함.
4. 답안이나 답안지의 여백에 자신을 드러낼 수 있는 답안 이외의 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현 또는 표시를 한 경우에는 0점 처리함.

<문제 1 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 방정식 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a,b,c)를 피타고라스 수라고 말한다. 특히 a,b,c가 서로소일 때 (a,b,c)를 원시 피타고라스 수라고 한다. 만약 (a,b,c)가 원시 피타고라스 수이면 a와 c는 서로소이고 a 또는 b 중에 하나는 반드시 2의 배수이어야 한다. 임의의 피타고라스 수는 원시 피타고라스 수의 자연수 배로 쓸 수 있다. 원시 피타고라스 수를 찾는 다양한 방법들이 고대 그리스 시대부터 많이 연구되었다. 피타고라스 수 (a,b,c)에 대해 $x=a/c$, $y=b/c$로 놓으면 x,y는 양의 유리수이고 $x^2+y^2=1$이다. 역으로 x,y가 양의 유리수이고 $x^2+y^2=1$을 만족하면, 적당한 자연수 a, b, c에 대하여 $x=a/c$, $y=b/c$이고 $a^2+b^2=c^2$이다. 따라서 피타고라스 수를 찾기 위해서 중심이 원점인 단위원 위의 양의 유리수로 이루어진 순서쌍 (x,y)를 구하는 문제를 생각한다. (p,q)를 단위원 위의 양의 유리수의 순서쌍이라고 하자. 그리고 $(0,1)$과 (p,q)를 지나는 직선 $y=tx+1$을 생각하면 기울기 t는 $-1<t<0$인 유리수이다. (【그림 1】 참고)

[나] 임의의 실수 t에 대하여 연립방정식 $x^2+y^2=1$, $y=tx+1$의 해 (x,y)를 구하자. 먼저 y를 소거하면 $x^2+(tx+1)^2=1$, 즉 $(1+t^2)x^2+2tx=0$이다. 좌변을 인수분해하면 $x[(1+t^2)x+2t]=0$이므로 $x=0$ 또는 $x=-2t/(1+t^2)$이다. 따라서 구하는 해는 $x=0$, $y=1$ 또는 $x=-2t/(1+t^2)$, $y=(1-t^2)/(1+t^2)$이다.

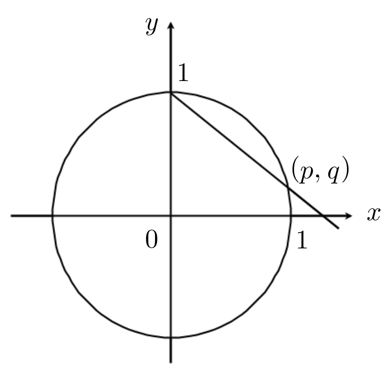
[다] 제시문 [가]와 [나]로부터, $x^2+y^2=1$을 만족하는 모든 양의 유리수 x와 y는

$$x(t)=\frac{-2t}{1+t^2},\quad y(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

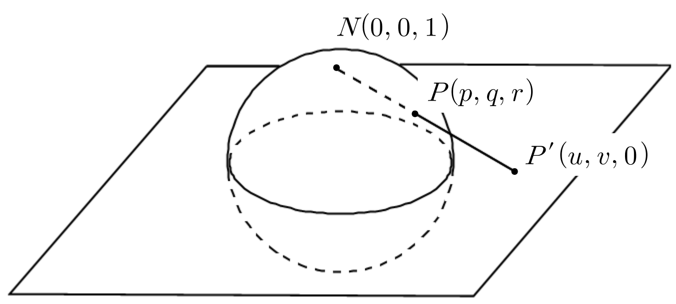
의 매개변수 방정식으로 나타난다는 것을 알 수 있다. 여기서 t는 $-1<t<0$인 유리수이다.

[라] 제시문 [가]와 유사한 방법에 의해서 $a^2+b^2+c^2=d^2$을 만족하는 자연수의 순서쌍 (a,b,c,d)를 구하는 문제로부터 단위구면 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 양의 유리수의 순서쌍 (p,q,r)을 찾는 문제를 생각할 수 있다. 제시문 [나]의 방법을 확장하여 (p,q,r)을 구하고자 한다. 【그림 2】처럼 구면의 북극점 $N(0,0,1)$을 지나고 점 $P(p,q,r)$을 지나는 직선이 구면의 적도를 지나는 xy평면과 만나는 점을 $P'(u,v,0)$라고 하면 다음 식 (1)을 만족한다.

$$p=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\quad q=\frac{2v}{u^2+v^2+1},\quad r=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \qquad \cdots\cdots (1)$$



【그림 1】



【그림 2】

【1-1】 m,n이 서로소인 자연수이면 mn과 m^2+n^2이 서로소임을 보여라.

【1-2】 제시문 [가], [다]와 【1-1】을 이용하여, (a,b,c)가 원시 피타고라스 수이고 a가 2의 배수이면

$$a=2mn,\ b=m^2-n^2,\ c=m^2+n^2$$

인 자연수 m,n이 존재함을 보여라.

【1-3】 임의의 실수 t에 대한 매개변수방정식

$$x(t)=\frac{-2t}{1+t^2},\quad y(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

은 점 $(0,-1)$을 제외한 단위원 상의 모든 점을 표현한다. 함수 $x(t)$, $y(t)$는 변수 t와 상수의 사칙연산에 의해 표현되므로 t에 관한 유리함수이다. 제시문 [나]를 참고하여 점 $(1,0)$을 제외하고 단위원 상의 모든 점 (x,y)를 표현하는 유리함수 $x(t)$와 $y(t)$를 구하여라.

【1-4】 제시문 [라]에서 (1)이 성립함을 증명하고 u,v가 유리수임을 보여라.

<문제 2 : 50%, 글자 제한 없음> 다음 글을 읽고, 물음에 답하라.

[가] 양의 실수 a에 대하여 정수 n을 지수로 가지는 a의 거듭제곱 a^n을 다음과 같이 정의한다.

$$a^n = \begin{cases} a\times\cdots\times a \ (n\text{번}), & n>0 \\ 1, & n=0 \\ (1/a)\times\cdots\times(1/a) \ (|n|\text{ 번}), & n<0 \end{cases}$$

그러면 임의의 양의 실수 a,b와 정수 m,n에 대하여 지수법칙

$$a^{m+n}=a^m a^n, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

이 성립한다. 또한 $a>1$일 때, $n>0$이면 $a^n>1$이고 $n<0$이면 $a^n<1$이다.

[나] 양의 실수 a와 자연수 n에 대하여 $x^n=a$를 만족하는 양의 실수 x는 오직 하나 존재하며 이것을 a의 양의 n제곱근이라고 하고 $x=\sqrt[n]{a}$ 라고 나타낸다. 정수 지수에 대한 지수법칙을 이용하여 임의의 양의 실수 a,b와 자연수 m,n,k에 대하여

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[nk]{a^{nk}}=\sqrt[m]{a^n}, \quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

가 성립하는 것을 보일 수 있다. 또한 $a>1$이면, 임의의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[n]{a}>1$이다.

[다] a를 양의 실수라고 하자. 임의의 유리수 r에 대하여 $r=m/n$인 정수 m과 자연수 n이 항상 존재하므로 유리수 r을 지수로 가지는 수 a^r을

$$a^r=\sqrt[n]{a^m} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (2)$$

으로 정의할 수 있다. 그러나 이 정의는 명확하지 않다. 왜냐하면 유리수 r을 분수로 표현하는 방법이 한 가지가 아니기 때문이다. 보다 자세히 말하면 $r=m/n$을 만족하는 정수 m과 자연수 n의 쌍 (m,n)이 무한히 많이 있으며 (2)의 우변이 $r=m/n$인 쌍 (m,n)에 따라서 다른 값이 될 수도 있기 때문이다. 사실 a^r에 대한 위의 정의는 타당하다. 이를 보이기 위하여 정수 m,k와 자연수 n,l에 대하여

$$r=\frac{m}{n}=\frac{k}{l}$$

으로 쓸 수 있다고 하자. 그러면 $ml=nk$이므로 정수 지수에 대한 지수법칙에 의하여

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nl}=(a^m)^l=a^{ml}=a^{nk}=(a^k)^n=\left(\sqrt[l]{a^k}\right)^{nl}$$

이고 따라서

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[l]{a^k}$$

이다. 이로부터 (2)의 우변이 r의 분수 표현에 관계없이 일정한 값이 된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 유리수 r을 지수로 하는 a^r에 대한 정의 (2)가 타당하다. 제시문 [가]와 [나]의 지수법칙과 제곱근의 성질을 이용하여 임의의 양의 실수 a,b와 유리수 r,s에 대한 다음의 지수법칙을 증명할 수 있다.

$$a^{r+s}=a^r a^s, \quad (a^r)^s=a^{rs}, \quad (ab)^r=a^r b^r$$

또한 $a>1$이고 r이 유리수일 때, $r>0$이면 $a^r>1$이고 $r<0$이면 $a^r<1$이 되는 것도 보일 수 있다.

[라] a를 양의 실수라고 하자. x가 임의의 무리수이면 모든 자연수 n에 대하여 $r_n<r_{n+1}$이고 $\lim_{n\to\infty} r_n = x$인 유리수의 수열 $\{r_n\}$을 항상 찾을 수 있다. 이 때, 유리수 r_n을 지수로 가지는 수들의 수열 $\{a^{r_n}\}$이 어떤 실수에 수렴한다는 것이 알려져 있다. 따라서 무리수 x를 지수로 가지는 수 a^x을 다음과 같이 정의한다.

$$a^x=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

【2-1】 a를 양의 실수라고 하자. 임의의 유리수 r에 대하여 $r=m/n$을 만족하는 서로소인 정수 m과 자연수 n은 오직 하나 존재한다. 따라서 제시문 [다]의 정의와 달리,

$$a^r=\sqrt[n]{a^m} \qquad \left(r=\frac{m}{n},\ m\text{ 과 } n\text{ 은 서로소}\right)$$

으로 정의하면 a^r을 명확하게 정의할 수 있다. 이 정의를 이용하여, 임의의 양의 실수 a와 유리수 r,s에 대하여

$$a^{r+s}=a^r a^s$$

가 성립함을 보여라.

【2-2】 a를 $a>1$인 실수라고 하자. 함수 $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ 을 아래와 같이 정의한다.

$$\phi(n)=\frac{a^n-1}{n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

함수 ϕ가 단조증가(즉, $m<n$이면 $\phi(m)<\phi(n)$)임을 수학적 귀납법으로 증명하고, 이를 이용하여 $0<r<1$인 임의의 유리수 r에 대하여

$$a^r-1<r(a-1)$$

이 성립함을 보여라. 여기서 $\mathbb{N}$과 $\mathbb{R}$은 각각 자연수의 집합과 실수의 집합을 나타낸다.

【2-3】 a를 $a>1$인 실수라고 하자. 【2-2】의 결과를 이용하여 r이 유리수, $\{r_n\}$이 유리수의 수열이고 $\lim_{n\to\infty} r_n=r$이면 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}=a^r$임을 보여라.
(힌트: 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n-L|\le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=L$이다.)

【2-4】 제시문 [라]에서 제안된 무리수 x에 대한 a^x의 정의가 명확하지 않은 이유를 밝혀라. 그럼에도 불구하고 이 정의가 타당함을 【2-3】의 결과에 근거하여 설명하여라.

2014학년도 수시모집 논술전형 예시답안

<자연과학부/전자공학계>

[문제 1]

가. 출제 및 채점기준

대수와 기하와의 관계를 이해하고 평면에서의 수학적 논리를 공간좌표계로 확장할 수 있는지 알아보고 좌표계를 이용하여 대수적인 문제를 기하적으로 해결 가능한 예와 기하적인 문제를 대수적으로 해결 가능한 예를 출제하여, 학생들이 기본 개념에 대한 이해 및 응용력을 평가하고자 했음

나. 예시답안

【1-1】 $p \geq 2$인 소수가 mn과 m^2+n^2을 나눈다고 가정하자. p가 소수이므로 p는 m 또는 n 둘 중의 하나를 나눈다. p가 m을 나눈다고 가정할 수 있다. 즉 적당한 자연수 α에 대하여 $m=p\alpha$라고 쓸 수 있다. 또 p가 m^2+n^2을 나누므로 적당한 자연수 β가 존재하여 $m^2+n^2=p\beta$라고 쓸 수 있다. 따라서 $p^2\alpha^2+n^2=p\beta$이므로 $n^2=p(\beta-p\alpha^2)$이다. p는 n^2 즉 n을 나누어 m과 n이 서로소라는 가정에 모순이다. 그러므로 mn과 m^2+n^2은 서로소이다.

【1-2】 (a,b,c)를 원시피타고라스 수라고 하고 a를 2의 배수라고 하자. 양의 a/c와 b/c는 유리수로서 $(a/c)^2+(b/c)^2=1$이다. 제시문 [다]로부터 적당한 유리수 $-1<t<0$에 대해

$$\frac{a}{c}=\frac{-2t}{1+t^2},\quad \frac{b}{c}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

이다. 유리수 t를 $t=-n/m$이라 놓자. 여기서 m, n은 서로소인 자연수 $n<m$이다. 그러면

$$\frac{a}{c}=\frac{2mn}{m^2+n^2},\quad \frac{b}{c}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

이다. a와 c가 서로소이고 a는 2의 배수이므로 $a/2$와 c도 서로소이다. 문제 [1-1]로부터 mn과 m^2+n^2은 서로소이므로 $a/2=mn$, $b=m^2-n^2$이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 자연수 m과 n이 존재한다.

【1-3】 $(1,0)$을 지나는 직선은 $y=t(x-1)$이다. 이 직선은 단위원 $x^2+y^2=1$과 $(1,0)$ 이외의 다른 점에서 항상 만난다. 두 방정식을 연립하여 x에 관해 정리하면, $(t^2+1)x^2-2t^2x+t^2-1=0$이므로

$$x=1 \text{ 또는 } x=\frac{t^2-1}{t^2+1} \quad (t\text{는 실수})$$

이다. $x=(t^2-1)/(t^2+1)$일 때 $y=-2t/(t^2+1)$이다. 따라서

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad y=\frac{-2t}{t^2+1}\quad (t\text{는 실수})$$

그리고 임의의 실수 t에 대해 $x=(t^2-1)/(t^2+1)\neq 1$이므로 $(1,0)$을 제외한 단위원의 모든 점을 표현한다.

【1-4】 $N(0,0,1)$과 (p,q,r)을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z-1}{r-1}\ \text{ 또는 }\ x=pt,\ y=qt,\ z=(r-1)t+1 \qquad (1)$$

이고 $z=(r-1)t+1=0$일 때 직선은 $(u,v,0)$를 지난다. 이때 $t=1/(1-r)$이고

$$u=\frac{p}{1-r},\ v=\frac{q}{1-r}$$

가 된다. 그리고 p,q,r이 유리수이므로 u,v도 유리수이다. $p^2+q^2+r^2=1$이고 $t=1/(1-r)$이므로 식 (1)로부터

$$\frac{u^2}{t^2}+\frac{v^2}{t^2}+\frac{(t-1)^2}{t^2}=1\quad \text{즉}\quad t=\frac{u^2+v^2+1}{2}$$

이다. 그러므로

$$p=\frac{u}{t}=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\qquad q=\frac{v}{t}=\frac{2v}{u^2+v^2+1},\qquad r=\frac{t-1}{t}=\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

이다. 이 식들로부터 $u,\ v$가 유리수 이면 $p,\ q,\ r$도 유리수임을 알 수 있다.

[문제 2]

가. 출제 및 채점기준

고교 교과과정에서 도입되는 지수의 정수, 유리수 및 실수로의 확장과 이와 관련하여 다른 수학 분야에서도 흔히 나오는 정의의 명확성 또는 모호성에 대한 이해를 묻는 문제임. 지수법칙과 거듭제곱근의 성질 등의 기본적인 사실들을 활용하는 능력과 여러 가지 부등식을 이용하여 수열의 수렴을 판단하는 능력 등도 함께 평가함.

나. 예시답안

【2-1】 유리수 r,s에 대하여 $r=m/n,\ s=k/l$이고 서로소인 정수 m과 자연수 n와 서로소인 정수 k와 자연수 l을 찾자. 그러면 제시문 [나]와 [가]의 제곱근의 성질과 지수법칙에 의하여

$$a^r a^s=\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[l]{a^k}=\sqrt[nl]{a^{ml}}\,\sqrt[nl]{a^{nk}}=\sqrt[nl]{a^{ml}a^{nk}}=\sqrt[nl]{a^{ml+nk}}$$

이다. 여기서, 물론

$$r+s=\frac{m}{n}+\frac{k}{l}=\frac{ml+nk}{nl}$$

이지만 $ml+nk$와 nl이 서로소가 아닐 수도 있기 때문에

$$a^{r+s}=\sqrt[nl]{a^{ml}a^{nk}}$$

이 성립하는 것이 정의에 의해서 당연한 것은 아니다. 그럼에도 불구하고 이것이 사실임을 보일 수 있다. 문제에서 제시된 a^{r+s}의 정의를 이용하기 위하여

$$r+s=\frac{ml+nk}{nl}=\frac{p}{q}$$

이고 서로 소인 정수 p와 자연수 q를 찾자. 그러면 제시문 [가]의 지수법칙에 의하여

$$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{nlq}=(a^p)^{nl}=a^{nlp}=a^{(ml+nk)q}=\left(\sqrt[nl]{a^{ml+nk}}\right)^{nlq}$$

이므로

$$a^{r+s}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nl]{a^{ml+nk}}=a^r a^s$$

이다.

【2-2】 함수 ϕ가 단조증가임을 보이기 위하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\phi(n)<\phi(n+1)$$

또는 동치인 부등식

$$na^{n+1}-(n+1)a^n+1>0 \tag{1}$$

가 성립함을 보이면 된다. $n=1$일 때는

$$a^2-2a+1=(a-1)^2>0$$

이므로 (1)이 당연히 성립한다. 부등식 (1)이 어떤 자연수 $n=k$에 대하여 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}&(k+1)a^{k+2}-(k+2)a^{k+1}+1\\&\quad=\left\{ka^{k+1}-(k+1)a^k+1\right\}a+a^{k+2}-a^{k+1}-a+1\\&\quad>a^{k+2}-a^{k+1}-a+1=(a-1)(a^{k+1}-1)>0\end{aligned}$$

이므로 (1)이 $n=k+1$에 대해서도 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 부등식 (1)이 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. 그러므로 함수 ϕ는 단조증가함수이고 $m<n$인 임의의 자연수 m,n에 대하여

$$\frac{a^m-1}{m}<\frac{a^n-1}{n}\quad\Leftrightarrow\quad a^m-1<\frac{m}{n}(a^n-1)$$

이 성립한다. $a>1$이면 $a^{1/n}>1$이므로 위의 부등식에서 a를 $a^{1/n}$으로 바꾸어도 성립한다. 따라서

$$a^{m/n}-1<\frac{m}{n}(a-1)$$

을 얻는다. $0<m/n<1$이므로 이것이 원하던 부등식이다.

참고) 사실 부등식 (1)의 증명을 위해 수학적 귀납법을 이용할 필요가 없다. 왜냐하면 (1)의 좌변을 인수분해하면 $a^n>1$이므로

$$na^{n+1}-(n+1)a^n+1=(na^n-1)(a-1)>0$$

이기 때문이다.

【2-3】 먼저, 임의의 유리수 r에 대하여 다음 부등식을 증명한다.

(2) $\left|a^r - 1\right| \le a^{|r|} - 1$

$r \ge 0$ 이면 $a^r \ge 1$ 이므로 부등식 (2)는 등호로 성립한다. $r < 0$ 라고 하자. 그러면 $a^r < 1$ 이므로 부등식 (2)는 아래의 부등식들과 동치이다.

$$1 - a^r \le a^{-r} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^r + a^{-r} \ge 2$$

그런데, 마지막 부등식은 산술·기하평균 부등식에 의해서 항상 성립한다. 따라서 부등식 (2)도 성립한다. 이제 r 이 유리수, $\{r_n\}$ 이 유리수의 수열이고 $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ 이라고 하자. 그러면 임의의 자연수 n 에 대하여 $r_n - r$ 이 유리수이므로 유리수 지수에 대한 지수법칙과 부등식 (2)를 이용하면

$$\left|a^{r_n} - a^r\right| = a^r \left|a^{r_n - r} - 1\right| \le a^r \left(a^{|r_n - r|} - 1\right)$$

이다. $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ 이므로 모든 n 에 대하여 $|r_n - r| < 1$ 라고 가정할 수 있다. 그러면 【2-2】에서 증명한 부등식에 의하여

$$\left|a^{r_n} - a^r\right| \le a^r |r_n - r| (a-1)$$

이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 알 수 있다. 따라서 주어진 힌트에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$$

이 성립한다.

【2-4】 (1) 제시문 [라]의 정의가 명확하지 않은 이유: $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ 이고 단조증가하는 유리수의 수열 $\{r_n\}$ 이 하나만 있는 것이 아니다. 따라서 제시문 [라]의 정의가 타당하려면 $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ 이고 단조증가하는 임의의 유리수의 수열 $\{r_n\}$ 에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ 이 수열 $\{r_n\}$ 에 관계없는 실수여야 한다. 그러나 이것은 유리수 지수에 대한 제시문 [다]로부터 자명하게 알 수 있는 사실이 아니므로 제시문 [라]의 정의는 명확하지 않다.

(2) 제시문 [라]의 정의가 타당하다는 것의 증명: 정의의 타당성을 증명하기 위해서는, $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ 이고 단조증가하는 임의의 유리수의 수열 $\{r_n\}$ 에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ 이 수열 $\{r_n\}$ 에 관계없는 실수임을 보여야 한다. $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n = x$ 이고 단조증가하는 두 개의 유리수의 수열 $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ 을 생각하자. 그러면 제시문 [라]에 의하여 두 극한 $L_1 = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$, $L_2 = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$ 이 존재한다. 또한, $\{r_n - s_n\}$ 은 유리수의 수열이고 $\lim_{n\to\infty} (r_n - s_n) = x - x = 0$ 이므로 【2-3】의 결과에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n - s_n} = a^0 = 1$$

이다. 따라서 유리수 지수에 대한 지수법칙을 이용하면

$$L_1 - L_2 = \lim_{n\to\infty} \left[a^{r_n} - a^{s_n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[a^{r_n - s_n} - 1\right] a^{s_n} = 0 \cdot L_2 = 0$$

이므로

$$L_1 = L_2$$

이다. 그러므로 제시문 [라]의 정의가 타당하다.